# Septiembre-Diciembre 2018

# MA2115 - Matemáticas IV

# Solución Parcial 2 (35 %)

## Turno 6-7

### Pregunta 1

(8 ptos. c/u) Resuelva

**a)** $(3x + y + 4)dy + (4x - 7y - 3)dx = 0$

**b)** $2xy' + xy = 2xe^x \operatorname{sen}(x^2)y^3 + y$, con $x > 0$.

### Solución

**a)** Reescribimos la ED de la forma

$$y' = \frac{-4x + 7y + 3}{3x + y + 4}$$

Considerando las rectas en el numerador y en el denominador igualadas a cero, vemos que que se intersecan en el punto $(-1, -1)$. Por ello, aplicamos los cambios

$$\begin{array}{cc} u = x + 1 & v = y + 1 \\ (x = u - 1) & (y = v - 1) \end{array}$$

Resultando en

$$\frac{dv}{du} = \frac{-4u + 7v}{3u + v}$$

La cual es una ED homogénea. Por ello, aplicamos ahora el cambio $v = uz$ ($z = \frac{v}{u}$), de modo que $\dfrac{dv}{du} = v' = uz' + z$. Así la expresión anterior se convierte en

$$uz' + z = \frac{-4 + 7z}{3 + z}$$

La cual es una ED que se resuelve por variables separables al llevarla a la forma

$$\frac{(3 + z)}{(z - 2)^2}dz = -\frac{du}{u}$$

Integramos respecto a la variable $u$ y queda

$$\ln|z - 2| - \frac{5}{z - 2} = -\ln|u| + C$$

Despejamos la constante $C$ y devolviendo el cambio de $z = \dfrac{v}{u}$.

$$C = \ln|u| - \frac{5u}{v-2u} + \ln\left|\frac{v-2u}{u}\right|$$

Devolviendo el cambio de $u$ y $v$ y simplificando, obtenemos finalmente que

$$\boxed{C = \ln|y-2x-1| - \frac{5x+5}{y-2x-1}}$$

es solución de la ED en su forma implícita, siempre que $y - 2x - 1 \neq 0$.

**b)** Reescribimos la ED de la siguiente forma

$$y' + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right) y = e^x \operatorname{sen}(x^2) y^3$$

La cual identificamos como una ecuación de Bernoulli con $n = 3$. Multiplicamos por $y^{-3}$ la ecuación, quedando

$$y' y^{-3} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right) y^{-2} = e^x \operatorname{sen}(x^2)$$

Así, aplicamos el cambio $\omega = y^{-2}$, de donde $y' y^{-3} = \frac{-\omega'}{2}$. La ecuación queda

$$-\frac{\omega'}{2} + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{x})\omega = e^x \operatorname{sen}(x^2)$$

O equivalentemente,

$$\omega' + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\omega = -2e^x \operatorname{sen}(x^2)$$

La cual identificamos como una ED lineal de primer orden. Calculamos el factor integrante $\mu(x) = e^{\int (x^{-1}-1)dx} = xe^{-x}$

Multiplicando por éste la expresión anterior, tenemos

$$\left(\omega x e^{-x}\right)' = -2x \operatorname{sen}(x^2)$$

Integrando respecto a $x$ a ambos lados, tenemos que

$$\omega x e^{-x} = \cos(x^2) + C$$

Devolviendo el cambio $\omega = y^{-2}$ y despejando $y^2$ tenemos finalmente que

$$\boxed{y^2 = \frac{x}{e^x(\cos(x^2) + C)}}$$

es una solución en forma implícita, siempre que $\cos(x^2) + C \neq 0$. Además de la solución trivial $\boxed{y \equiv 0}$.

**Pregunta 2**

(7 ptos.) Un termómetro que marca 70°F se coloca en un horno precalentado a temperatura constante. A través de una ventana de vidrio localizada en la puerta del horno se observa que el termómetro marca 110°F después de medio minuto y 145°F luego de un minuto. ¿Cuál es la temperatura del horno?

**Solución**

Sea $t$ el tiempo medido en minutos. Sea $T(t)$ la temperatura del termómetro a tiempo $t$. Tenemos que se satisface la ED

$$\frac{dT}{dt} = k(T - A)$$

donde $k$ es una constante de proporcionalidad, y $A$ es la temperatura del medio; en nuestro caso, del horno.

También tenemos que $T(0) = 70$, $T(1/2) = 110$ y $T(1) = 145$. Estamos interesados en la temperatura del horno, es decir, en hallar el valor de $A$.

Resolviendo la ED por el método de variables separables, tenemos que

$$T(t) = A + Ce^{kt}$$

Sustituyendo la primera condición, $T(0) = A + C = 70$, deducimos que $C = 70 - A$. Sustituyendo en la fórmula de $T(t)$, tenemos que

$$T(t) = A + (70 - A)e^{kt}$$

De la siguiente condición tenemos que $110 = T(1/2) = A + (70 - A)e^{k/2}$. Despejando la exponencial tenemos que

$$e^k = \frac{(110 - A)^2}{(70 - A)^2}$$

De la última condición tenemos que $145 = T(1) = A + (70 - A)e^k$. Despejando la exponencial nuevamente, tenemos que

$$e^k = \frac{145 - A}{70 - A}$$

Luego, igualando las exponenciales, tenemos que

$$\frac{(110 - A)^2}{(70 - A)^{\cancel{2}}} = \frac{145 - A}{\cancel{70 - A}}$$

De donde obtenemos

$$\begin{aligned} (110)^2 - 220A + A^2 &= (145 - A)(70 - A) \\ 12100 - 220A + \cancel{A^2} &= 10150 - 215A + \cancel{A^2} \\ 5A &= 1950 \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que la temperatura del horno viene dada por $\boxed{A = 390°\text{F}}$

**Pregunta 3**

(8 ptos.) Un tanque de 60 litros contiene inicialmente 2 litros de agua pura. La salmuera, que contiene 2 gramos de sal por litro, se bombea hacia el tanque a una velocidad de 5 litros por minuto. La solución perfectamente mezclada se bombea hacia fuera a la misma razón.

**a)** Plantee el P.V.I. que modele la situación.

**b)** Halle la cantidad $x(t)$ de gramos de sal presente en el tanque en el tiempo $t$. ¿Cuándo tendrá 3 gramos de sal el tanque?

**c)** Si se aumenta la velocidad de entrada de la salmuera a 8 litros por minuto, mientras que la de salida permanece igual, halle $x(t)$ en este caso.

**Solución**

Identificamos: $t$, el tiempo medido en minutos. $x(t)$ la cantidad de sal a tiempo $t$, en gramos. $V(t)$, el volumen del tanque a tiempo $t$. $c_e$ y $c_s$ la concentración de gramos de sal por litro, de entrada y de salida respectivamente. $r_e$ y $r_s$, la velocidad de entrada y salida de salmuera, respectivamente, en litros por minuto.

Los datos que nos proporciona el enunciado son:

$$\begin{array}{cc} V(0) = 2 & x(0) = 0 \\ c_e = 2 & r_e = r_s = 5 \end{array}$$

**a)** Es conocida que la razón de cambio de la sal en el tanque viene representada por la fórmula

$$\frac{dx}{dt} = r_e c_e - r_s c_s$$

donde $c_s = \dfrac{x}{V}$, y $V(t) = V_0 + (r_e - r_s)t$. En este caso, tendríamos, $V = 2$ constante; y por tanto $c_s = \dfrac{x}{2}$. Entonces, sustituyendo en la fórmula tenemos que el P.V.I. viene dado por

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{5}{2}x = 10 \\ \\ x(0) = 0 \end{cases}}$$

**b)** Resolvemos la ED de la parte **a)** por el método de factor integrante. Donde el factor integrante es $\mu(t) = e^{\frac{5}{2}t}$. La familia de soluciones de un parámetro viene dada por

$$x(t) = 4 + Ce^{-\frac{5}{2}t}$$

Sustituyendo la condición inicial $x(0) = 0$, obtenemos que $C = -4$. Luego, la cantidad de sal a tiempo $t$ es

$$\boxed{x(t) = 4 - 4e^{-\frac{5}{2}t}}$$

Ahora, para saber cuándo tendrá 3 gramos de sal el tanque, igualamos la última expresión a 3 y despejamos $t$. Entonces, de $3 = 4-4e^{-\frac{5}{2}t}$ obtenemos que

$$\boxed{t = \frac{4\ln 2}{5}} \approx 0{,}55\text{min} = 33\text{seg}$$

**c)** Ahora tenemos que $r_e = 8$ y $r_s = 5$. Lo que varía es $V(t) = 2 + (8-3)t = 2 + 3t$. Luego, la ED queda

$$\frac{dx}{dt} + \frac{5}{2+3t}x = 16$$

Nuevamente vuelve a ser una ED lineal de primer orden que se resuelve por el método del factor integrante, que en este caso es $\mu(t) = (2+3t)^{5/3}$. Luego, la familia de soluciones de un parámetro viene dada por

$$x(t) = 2(2+3t) + C(2+3t)^{-5/3}$$

Sustituyendo la condición inicial $x(0) = 0$, tenemos que $C = -4 \cdot 2^{5/3}$, y así la cantidad de sal a tiempo $t$ viene dada por la fórmula

$$\boxed{x(t) = 2(2+3t) - 4\left(\frac{2}{2+3t}\right)^{5/3}}$$

**Pregunta 4**

(1 pto. c/u) Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

**a)** Dada la familia de soluciones de un parámetro $y = Ce^{kt}$, de la ecuación diferencial autónoma (E.D.A.) $y' = ky$, con $k < 0$ constante. La solución trivial es una solución singular de esta familia de soluciones.

**b)** Suponga que $M$ denota la cantidad total del tema a estudiar para este examen parcial, y que $A(t)$ denota la cantidad memorizada a tiempo $t$ por un estudiante de este curso. Si asumimos que la velocidad a la que se memoriza un tema es proporcional a la cantidad de contenido por memorizar, y que la velocidad a la que el contenido se olvida es proporcional a la cantidad memorizada en el tiempo $t$. Entonces la tasa de memorización de un estudiante que se preparó para este examen está dada por la E.D.A.

$$\frac{dA}{dt} = k_1(M - A) + k_2 A$$

donde $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$ son constantes.

**c)** Considere la E.D.A. $y' = y \ln(y + 2)$. El punto de equilibrio 0 es asintóticamente inestable.

**d)** Considere la E.D.A. $y' = y^2(1 - 9e^{-y})$. El punto estacionario 0 es asintóticamente estable.

**Solución**

**a)** **Falso.** Si fuera una solución singular no existiría ningún valor para la constante $C$ que permita obtener la solución trivial. Es claro que la solución trivial, además de ser solución particular (y de equilibrio) de la EDA, se obtiene al hacer $C = 0$ en la familia de soluciones de un parámetro dada.

**b)** **Falso.** Hay dos maneras de corregir la ED: o bien se escribe $-k_2 A$, o se hace la acotación de que $k_2 < 0$. Dado que estamos tratando *el olvido*, es una cantidad memorizada que *se pierde*. Por tanto es una cantidad que se debe restar y no sumar en la ED.

**c)** **Verdadero.** Haciendo el retrato de fase, se verifica fácilmente que el punto crítico 0 es un repulsor.

**d)** **Falso.** Haciendo el retrato de fase, se verifica fácilmente que el punto crítico 0 es asintóticamente semiestable.

Prof. Jorge Sánchez
jorgesanchez@usb.ve